



ANALISIS KESTABILAN DAN SENSITIVITAS PADA MODEL MATEMATIKA SEIRD
DARI PENYEBARAN COVID-19: STUDI KASUS DI KALIMANTAN SELATAN

Oleh:

Muhammad Ahsar Karim¹⁾ & Yuni Yulida²⁾

^{1,2}Program Studi Matematika FMIPA Universitas Lambung Mangkurat

Email: ¹ m_ahsar@ulm.ac.id & ² y_yulida@ulm.ac.id

Abstract

The cases of Covid-19 that occurred in South Kalimantan were classified into 5 groups, namely suspected, treated, recovered, deaths, and healthy population who were susceptible for being infected with Covid-19. The dynamics of changes in the number of cases in each group can be studied mathematically through epidemiological mathematical modeling. In this study, the SEIRD Model (Susceptible, Exposed, Infected, Recovered, and Deaths) was formed to describe the dynamics of changing the number of Covid-19 cases in South Kalimantan. In this model, stability analysis and formulation of indicators for the controllability of the spread of Covid-19 are given, known as the Basic Reproduction Number. Furthermore, a sensitivity analysis of the parameters contained in the Basic Reproduction Number is given to determine the priority efforts that can be made to suppress the spread of Covid-19 in South Kalimantan.

Keywords: Covid-19, South Kalimantan, SEIRD Model, Stability Analysis, Basic Reproduction Number, And Sensitivity Analysis.

PENDAHULUAN

Wabah Covid-19 (*Coronavirus Disease 2019*) telah menjadi masalah kesehatan yang serius sejak Desember 2019. Sejak diduga pertama kali berkontak dengan manusia di Wuhan, China pada November 2019, virus ini mulai menyebar serta menebar ketakutan dan kepanikan bagi seluruh masyarakat dunia. Wabah Covid-19 ditetapkan sebagai pandemi global oleh Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) pada 11 Maret 2020. Segera setelah itu, pemerintah Indonesia, yang mengkonfirmasi kasus Covid-19 pertama kali di Indonesia pada 2 Maret 2020, bereaksi atas pandemi ini dengan mulai menerapkan pola bekerja dari rumah (*Work from Home*) pada 16 Maret 2020.

Di Provinsi Kalimantan Selatan (Kalsel), kasus positif Covid-19 pertama kali terkonfirmasi pada 22 Maret 2020 dan kemudian terus mengalami peningkatan yang signifikan hingga pekan ke-tiga April 2020. Pada 24 April - 31 Mei 2020, Pemerintah Kalsel mulai menerapkan Pembatasan Sosial Berskala Besar (PSBB) di beberapa kabupaten/kota yang mengkonfirmasi tingginya jumlah kasus positif

Covid-19. Pada Mei 2020, Yulida dan Karim [1] mempublikasikan kajian pemodelan matematika penyebaran Covid-19 di Kalsel melalui model matematika SIR (*Susceptible, Infectious, Recovered*) dan menduga, apabila PSBB benar-benar memberikan efek yang signifikan dalam menekan laju penularan Covid-19 di wilayah ini, maka kasus positif Covid-19 di Kalsel akan mencapai puncak pada Agustus 2020.

Pada awal Juni 2020, Pemerintah Kalsel mulai menerapkan 'New Normal', yaitu Tatanan Hidup Baru di tengah wabah Covid-19 yang dilaksanakan berdasarkan Panduan Pencegahan dan Pengendalian Covid-19 di Tempat Kerja Perkantoran dan Industri dalam Mendukung Keberlangsungan Usaha pada Situasi Pandemi (Keputusan Menkes dengan nomor HK.01.07/MENKES/328/2020). Pada Juli 2020, Karim dan Yulida [2] kembali mempublikasikan artikel terkait evaluasi terhadap penerapan *New Normal* melalui model matematika SIRD (*Susceptible, Infectious, Recovered, Deaths*) dengan menggunakan data kasus Covid-19 pada 16 Juni - 17 Juli 2020. Hasil evaluasi tersebut menunjukkan bahwa data penularan Covid-19 di



wilayah Kalsel belum dapat dikendalikan, dengan mengacu pada Angka Reproduksi Dasar dan angka Reproduksi Efektif melebihi 1.

Upaya penanganan kasus Covid-19 di Indonesia terus ditingkatkan, salah satunya melalui terbitnya Pedoman Pencegahan dan Pengendalian Covid-19 Revisi Ke-5 oleh Kementerian Kesehatan RI pada 13 Juli 2020. Salah satu perbedaan antara revisi ke-5 dengan revisi sebelumnya, yaitu Maret 2020 adalah perubahan definisi operasional pada kegiatan surveilans. Perubahan ini mengubah isi update data harian kasus Covid-19 sejak 22 Juli 2020, dari informasi sebelumnya yang berisi jumlah kasus Orang Dalam Pemantauan (ODP), Pasien Dalam Pengawasan (PDP), dan Positif (terdiri dari kasus Dalam Perawatan, Sembuh, dan Meninggal) menjadi informasi yang berisi jumlah kasus Suspek dan Positif (Aktif/Dirawat, Sembuh, dan Meninggal). Hal ini tentu juga akan mengubah rumusan model matematika Covid-19, dengan beberapa tambahan variabel dan sejumlah parameter.

Berbagai peneliti di bidang pemodelan matematika telah melakukan upaya-upaya untuk merumuskan model yang mendekati pola penyebaran Covid-19. Dipo Aldila dkk. [3] memodifikasi model SEIR dengan mempertimbangkan individu tanpa gejala untuk mengetahui pengaruh rapid test dan social distancing dalam pengendalian penyebaran COVID-19, khususnya di kota Jakarta. Zohreh Abbasi dkk. [4] menyajikan model SQEIAR, yaitu mempertimbangkan individu yang dikarantina dengan tujuan untuk mengurangi jumlah kelompok rentan, terinfeksi, terpapar, dan tanpa gejala untuk secara konsekuen memberantas infeksi dengan menggunakan dua Tindakan, yaitu karantina dan pengobatan pada individu yang terinfeksi. Sedangkan Muhammad Abdy dkk. [5] membangun model SIR untuk COVID-19 dengan menggunakan parameter fuzzy, yang mempertimbangkan faktor vaksinasi, pengobatan, kepatuhan dalam melaksanakan protokol kesehatan, dan beban virus corona.

Sementara itu, di Kalsel, data kasus positif Covid-19 terus mengalami peningkatan sejak November 2020 hingga pertengahan Februari 2021. Hal ini terpantau melalui akun instagram Dinas Kesehatan Provinsi Kalimantan Selatan (Instagram.com/dinkesprovkalsel, 2021). Salah satu upaya yang ditempuh oleh Pemerintah Kalsel dalam upaya mengendalikan kasus Covid-19 di Kalsel adalah melalui Pemberlakuan Pembatasan Kegiatan Masyarakat (PPKM), yang mulai diberlakukan oleh Pemerintah Kalsel selama dua pekan, 11 - 25 Januari 2021. Namun, karena tingkat kasus positif Covid-19 di Kalsel masih terus meningkat, yang diantaranya turut dipicu akibat banjir di beberapa daerah di wilayah Kalsel, maka perpanjangan PPKM dilakukan oleh Pemprov Kalsel dari 26 Januari - 8 Februari 2021. Kemudian, tercatat bahwa Pemko Banjarmasin dan Pemko Banjarbaru kembali memperpanjang pelaksanaan PPKM dengan pemberlakuan PPKM tingkat kelurahan hingga RT atau PPKM berskala mikro, yang berlaku dari 9 - 22 Februari 2021. Penerapan PPKM Skala Mikro di Kalsel berlangsung hingga 25 Juli 2021, dengan periode evaluasi rata-rata setiap dua pekan.

Kenaikan kasus Covid-19 secara nasional yang belum menunjukkan keterkendalian mendorong evaluasi dan upaya percepatan pengendalian penyebaran kasus Covid-19 melalui instruksi pemerintah pusat dalam penerapan PPKM level 4, level 3, dan level 2, yang dimulai di wilayah Jawa dan Bali pada 2 Agustus 2021. Hal ini tertuang dalam Instruksi Menteri Dalam Negeri Nomor 27 Tahun 2021 tentang Pemberlakuan Pembatasan Kegiatan Masyarakat Level 4, Level 3, dan Level 2 Corona Virus Disease 2019 di Wilayah Jawa dan Bali. Pada saat yang bersamaan, Pemerintah Provinsi Kalimantan Selatan menerapkan PPKM Level 3 dan 4 di berbagai Kabupaten/Kota di Kalsel hingga 8 Agustus 2021. Kriteria Level 4 khusus berlaku untuk dua kota di Kalsel, yaitu Banjarmasin dan Banjarbaru. Selain kedua daerah tersebut, daerah lainnya di Kalsel berada pada kriteria Level 3.



Penerapan PPKM Level 4 untuk Banjarbaru dan Banjarmasin berlangsung hingga 4 Oktober 2021. Mulai 5 Oktober 2021, oleh pemerintah pusat diputuskan bahwa PPKM Kota Banjarbaru turun dari Level 4 ke Level 3, sedangkan untuk Kota Banjarmasin diputuskan turun dari Level 4 ke Level 2. Hal ini seiring dengan penurunan kasus di Kalimantan Selatan, khususnya di kedua kota tersebut selama bulan September hingga Oktober 2021.

Pada penelitian ini dibahas pemodelan matematika dari dinamika penyebaran Covid-19 di Kalsel berdasarkan pengelompokan populasi penduduk Kalsel ke dalam kelompok-kelompok kasus Sehat/Rentan, Suspek, dan Positif (terdiri dari kasus Dirawat/Terinfeksi, Sembuh, dan Meninggal). Selanjutnya, pada model yang terbentuk diberikan analisis kestabilan, rumusan indikator keterkendalian penyebaran Covid-19, yaitu *Basic Reproduction Number* (Bilangan Reproduksi Dasar), dan analisis sensitivitas untuk menentukan prioritas upaya yang dapat dilakukan untuk menekan penyebaran Covid-19 di Kalsel.

METODE PENELITIAN

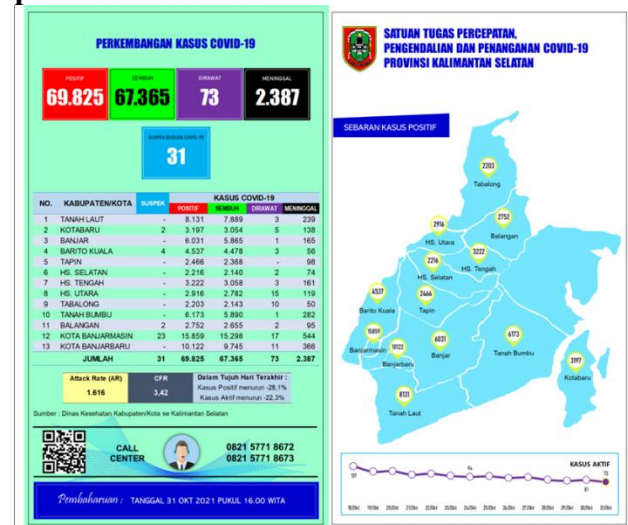
Obyek Penelitian

Penelitian ini didasarkan pada pengelompokan kasus Covid-19 di Kalsel. Pengelompokan kasus tersebut dapat dipantau melalui publikasi Dinkes Kalsel (Instagram.com/dinkesprovkalsel, 2021). Contoh update data harian Perkembangan Kasus Covid-19 di Kalsel oleh Dinkes Kalsel diberikan pada Gambar 1.

Pada Gambar 1, diantaranya ditunjukkan jumlah kasus-kasus Covid-19 di seluruh Kab/Kota di Kalsel pada 31 Oktober 2021. Kasus-kasus tersebut terdiri dari kelompok Suspek, Positif, Sembuh, Dirawat, dan Meninggal. Kasus Positif merupakan akumulasi dari kasus Sembuh, Dirawat, dan Meninggal. Jumlah penduduk di Kalsel yang sehat/rentan terinfeksi tidak ditampilkan dalam gambar di atas, namun dapat diperoleh melalui selisih dari jumlah penduduk Kalsel (BPS Kalsel, 2021) dengan jumlah akumulasi kasus Suspek dan

kasus Positif. Dengan demikian, kelompok kasus Covid-19 di Kalsel yang dijadikan obyek dalam pembentukan model matematika terdiri dari kasus Rentan, Suspek, Sembuh, Dirawat, dan Meninggal.

Gambar 1. Update data harian Perkembangan Kasus Covid-19 di Kalsel pada 31 Oktober 2021 oleh Dinkes Kalsel.



Metodologi Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi kasus dan studi literatur. Studi kasus menggunakan kelompok kasus Covid-19 di Kalsel, yaitu berdasarkan definisi operasional pada kegiatan surveilans dalam Pedoman Pencegahan dan Pengendalian Covid-19 Revisi Ke-5 oleh Kementerian Kesehatan RI pada 13 Juli 2020. Definisi ini membagi kasus Covid-19 di Kalsel sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 1.

Studi literatur dilakukan dengan mengumpulkan dan mengkaji teori-teori dalam pemodelan matematika epidemiologi sebagai dasar untuk pembentukan model matematika penyebaran Covid-19 di Kalsel. Diantara teori tersebut adalah persamaan diferensial, analisis kestabilan sistem, Bilangan Reproduksi Dasar, analisis sensitivitas, dan Metode Runge Kutta.



HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Matematika Penyebaran Covid-19 di Kalsel

Pembentuk model matematika penyebaran Covid-19 di Kalsel dibangun berdasarkan pembagian kelompok kasus sebagaimana penjelasan pada Gambar 1. Berdasarkan penjelasan tersebut, maka dibuat asumsi pembagian kelompok populasi penduduk Kalsel yang terdampak Covid-19 sebagai berikut:

1. Kelompok Sehat/Rentan (selanjutnya disebut *Susceptible* dan disimbolkan dengan $S(t)$), yaitu jumlah individu yang rentan terinfeksi Covid-19 pada waktu t .
2. Kelompok Suspek (selanjutnya disebut *Exposed/Suspected* dan disimbolkan dengan $E(t)$), yaitu jumlah individu yang memiliki gejala infeksi saluran pernapasan akut atau riwayat kontak erat dengan individu terinfeksi Covid-19 pada waktu t .
3. Kelompok Dirawat/Terinfeksi (selanjutnya disebut *Infected* dan disimbolkan dengan $I(t)$), yaitu jumlah individu terinfeksi/dirawat karena Covid-19 pada waktu t .
4. Kelompok Sembuh (selanjutnya disebut *Recovered* dan disimbolkan dengan $R(t)$), yaitu jumlah individu sembuh dari Covid-19 pada waktu t .
5. Kelompok Meninggal (selanjutnya disebut *Deaths* dan disimbolkan dengan $D(t)$), yaitu jumlah individu yang meninggal karena terinfeksi Covid-19 pada waktu t .

Akumulasi kasus Terinfeksi, Sembuh, dan Meninggal disebut Positif (selanjutnya disebut *Positive* dan disimbolkan dengan $P(t)$).

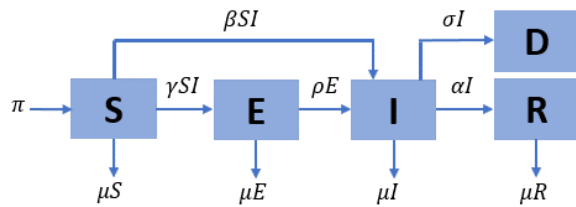
Berdasarkan 5 kelompok yang terbentuk di atas, selanjutnya disusun asumsi-asumsi untuk pembentukan model matematika penyebaran Covid-19 di Kalsel. Adapun asumsi-asumsi yang dihasilkan adalah:

1. Populasi penduduk Kalsel bersifat terbuka, yaitu terdapat penambahan dan pengurangan jumlah penduduk akibat kelahiran atau kematian.

2. Semua individu yang lahir diasumsikan masuk ke dalam kelompok *Susceptible*.
3. Individu pada kelompok *Infected* dapat menularkan penyakit Covid-19.
4. Penularan Covid-19 terjadi jika ada kontak langsung antara individu dari kelompok *Infected* dengan individu dari kelompok *Susceptible*. Kontak langsung dapat terjadi melalui media udara, jabat tangan, dan lain-lain.
5. Individu dari kelompok *Susceptible* yang melakukan kontak dengan kelompok *Infected* dapat digolongkan ke dalam kelompok *Exposed* apabila menunjukkan adanya gejala terjangkit Covid-19.
6. Individu dari kelompok *Exposed* dapat digolongkan ke dalam kelompok *Infected* jika hasil pemeriksaan menunjukkan adanya infeksi Covid-19 dan selanjutnya dirawat karena terjangkit Covid-19.
7. Individu dari kelompok *Susceptible* yang melakukan kontak dengan kelompok *Infected* dapat digolongkan ke dalam kelompok *Infected* apabila telah dilakukan pemeriksaan dan dirawat karena terjangkit Covid-19.
8. Individu dari kelompok *Infected* yang sembuh karena adanya pengobatan digolongkan ke dalam kelompok *Recovered*.
9. Individu dari kelompok *Infected* dapat mengalami kematian karena Covid-19 maupun kematian secara alami. Sedangkan individu dari kelompok *Susceptible* diasumsikan hanya mengalami kematian secara alami.
10. Individu dari kelompok *Infected* dapat mengalami kematian karena penyakit Covid-19, yang digolongkan ke dalam kelompok *Death*.

Berdasarkan 10 asumsi tersebut, selanjutnya dibentuk diagram alur dari transmisi individu antar kompartemen/kelompok yang diberikan pada Gambar 2.

Gambar 2. Diagram alur dari transmisi individu antar kompartemen/kelompok individu pada kasus Covid-19 di Kalsel.



Dari diagram alur pada Gambar 2, selanjutnya dibentuk model matematika penyebaran Covid-19 di Kalsel sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = \pi - \frac{(\beta + \gamma)SI}{N} - \mu S, \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\gamma SI}{N} - (\rho + \mu)E, \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} + \rho E - (\alpha + \mu + \sigma)I, \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu R, \quad (4)$$

$$\frac{dD}{dt} = \sigma I. \quad (5)$$

dengan S , E , I , R , dan D masing-masing dalam waktu t dan

$$N = S + E + I + R + D.$$

Parameter-parameter konstan positif menyatakan:

- π : tingkat kelahiran,
- β : tingkat infeksi Covid-19,
- γ : tingkat penelusuran kontak erat,
- ρ : tingkat keterpaparan kontak erat,
- α : tingkat kesembuhan,
- σ : tingkat kematian karena covid-19,
- μ : tingkat kematian alami.

Model matematika penyebaran Covid-19 di Kalsel pada Sistem Persamaan (1)-(5) selanjutnya disebut Model SEIRD.

Untuk menganalisa Model SEIRD, maka hanya digunakan Persamaan (1)-(4) saja, karena variabel D tidak berpengaruh terhadap perubahan kelompok populasi yang lain. Dengan demikian, D dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$D = N - (S + E + I + R) \quad (6)$$

Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium dari Model SEIRD harus memenuhi sistem berikut:

$$\pi - \frac{(\beta + \gamma)SI}{N} - \mu S = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\gamma SI}{N} - (\rho + \mu)E = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\beta SI}{N} + \rho E - (\alpha + \mu + \sigma)I = 0 \quad (9)$$

$$\alpha I - \mu R = 0 \quad (10)$$

Dari Persamaan (8) diperoleh

$$E = \frac{\gamma SI}{(\rho + \mu)N} \quad (11)$$

Persamaan (11) disubstitusi ke Persamaan (9) dan diperoleh

$$I = 0 \quad (12)$$

atau

$$S = \frac{(\alpha + \mu + \sigma)(\rho + \mu)N}{\rho\gamma + \beta(\rho + \mu)} \quad (13)$$

Persamaan (12) disubstitusi ke Persamaan (7), (10), dan (11) sehingga diperoleh

$$S = \frac{\pi}{\mu} \quad (14)$$

$$R = 0 \quad (15)$$

$$E = 0 \quad (16)$$

Jadi, berdasarkan Persamaan (6), (12), (14), (15), dan (16), maka diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit dari Model SEIRD sebagai berikut

$$\epsilon_0 = (S, E, I, R) = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0\right) \quad (17)$$

Basic Reproduction Number

Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*) berfungsi untuk menginformasikan penyebaran suatu penyakit dan dapat menjadi parameter dalam memberikan strategi untuk pengendalian penyakit. Bilangan Reproduksi Dasar dapat diartikan sebagai jumlah rata-rata kasus infeksi sekunder yang terjadi ketika individu yang terinfeksi masuk ke dalam populasi yang semuanya rentan. Bilangan ini dapat ditentukan dari Persamaan (3), yaitu melalui perubahan jumlah individu Terinfeksi karena Covid-19. Jika Persamaan (11) disubstitusi ke Persamaan (3) diperoleh,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} + \rho \frac{\gamma SI}{(\rho + \mu)N} - (\alpha + \mu + \sigma)I.$$

Populasi akan terbebas dari penyakit Covid-19 apabila $\frac{dI}{dt} < 0$. Karena $I \geq 0$, maka diperoleh

$$\left(\frac{\beta(\rho + \mu) + \rho\gamma}{(\alpha + \sigma + \mu)(\rho + \mu)N}\right) S < 1.$$



Pada saat populasi *virgin*, yaitu $S = \frac{\pi}{\mu}$, maka diperoleh

$$\frac{\pi}{\mu} \left(\frac{\beta(\rho + \mu) + \rho\gamma}{(\alpha + \sigma + \mu)(\rho + \mu)N} \right) < 1.$$

Bilangan Reproduksi Dasar dari Model SEIRD disimbolkan dengan \mathcal{R}_0 dan dipilih

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\pi}{\mu} \left(\frac{\beta(\rho + \mu) + \rho\gamma}{(\alpha + \sigma + \mu)(\rho + \mu)N} \right) \quad (18)$$

Menurut Driessche dan Watmough [6], jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka penyakit akan hilang seiring waktu, sedangkan jika $\mathcal{R}_0 \geq 1$, maka penyakit akan tetap menjadi endemik hingga potensial meningkat pada skala yang besar berkaitan dengan kematian.

Titik Ekuilibrium Endemik

Dari Persamaan (13) dan (18) diperoleh

$$S = \frac{\pi}{\mu\mathcal{R}_0}. \quad (19)$$

Persamaan (19) disubstitusi ke Persamaan (7), sehingga diperoleh

$$I = \frac{(\mathcal{R}_0 - 1)\mu N}{(\beta + \gamma)}, \quad (20)$$

dengan syarat $\mathcal{R}_0 > 1$.

Persamaan (19) dan (20) disubstitusi ke Persamaan (11) dan Persamaan (20) disubstitusi ke Persamaan (10), sehingga berturut-turut diperoleh

$$E = \frac{\gamma\pi(\mathcal{R}_0 - 1)}{(\rho + \mu)(\beta + \gamma)\mathcal{R}_0} \quad (21)$$

dan

$$R = \frac{\alpha(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta + \gamma} N, \quad (22)$$

dengan syarat $\mathcal{R}_0 > 1$.

Jadi, dari Persamaan (19)-(22) diperoleh titik ekuilibrium endemik sebagai berikut

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= (S, E, I, R) \\ &= \left(\frac{\pi}{\mu\mathcal{R}_0}, \frac{\gamma\pi(\mathcal{R}_0 - 1)}{(\rho + \mu)(\beta + \gamma)\mathcal{R}_0}, \frac{(\mathcal{R}_0 - 1)\mu N}{(\beta + \gamma)}, \frac{\alpha(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta + \gamma} N \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Analisis Kestabilan

Analisa kestabilan Model SEIRD di sekitar titik ekuilibrium dilakukan dengan

Vol.16 No.5 Desember 2021

menggunakan Matriks Jacobi. Matriks Jacobi dari Model SEIRD pada Persamaan (1)-(4) adalah

$$J(\epsilon) = [j_{mn}]. \quad (24)$$

dengan $m, n = 1, 2, 3, 4$ dan

$$j_{11} = -\frac{(\beta + \gamma)I}{N} - \mu, j_{13} = -\frac{(\beta + \gamma)S}{N},$$

$$j_{21} = \frac{\gamma I}{N}, \quad j_{22} = -(\rho + \mu),$$

$$j_{23} = \frac{\gamma S}{N}, \quad j_{31} = \frac{\beta I}{N},$$

$$j_{32} = \rho, \quad j_{33} = \frac{\beta S}{N} - (\alpha + \mu + \sigma),$$

$$j_{43} = \alpha, \quad j_{44} = -\mu, \text{ dan}$$

$$j_{12} = j_{14} = j_{24} = j_{34} = j_{41} = j_{42} = 0.$$

(1) Di titik ekuilibrium bebas penyakit ϵ_0 pada Persamaan (17), melalui persamaan karakteristik

$$|J(\epsilon_0) - \lambda| = 0,$$

maka diperoleh $\lambda_{1,2} = -\mu < 0$, yang berakibat bahwa

$$Re(\lambda_{1,2}) < 0 \quad (25)$$

atau diperoleh

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \quad (26)$$

dengan

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = \beta(\rho + \mu)^2 + \beta(\alpha + \mu + \sigma)(\rho + \mu)(1 - R_0) + \rho\gamma,$$

$$a_2 = (\alpha + \mu + \sigma)(\rho + \mu)[1 - R_0].$$

Dari Persamaan (26) dibentuk Matriks Hurwitz sebagai berikut

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Melalui Matrik (27) diperoleh:

$$(i) H_1 = |a_1| = \beta(\rho + \mu)^2 + \beta(\alpha + \mu + \sigma)(\rho + \mu)(1 - R_0) + \rho\gamma > 0, \quad (28)$$

dengan syarat $\mathcal{R}_0 < 1$;

$$(ii) H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 = \quad (29)$$

$$H_1 a_2 > 0,$$

dengan syarat $\mathcal{R}_0 < 1$.

Berdasarkan Persamaan (28) dan (29), dapat diketahui bahwa dari Persamaan (26) diperoleh

$$Re(\lambda_{3,4}) < 0. \quad (30)$$



Jadi, dari Persamaan (25) dan (30) dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit ϵ_0 adalah stabil asimtotik syarat $\mathcal{R}_0 < 1$.

- (2) Di titik ekuilibrium endemik ϵ_1 pada Persamaan (23), melalui persamaan karakteristik

$$|J(\epsilon_1) - \lambda| = 0,$$

maka diperoleh $\lambda_1 = -\mu < 0$, yang berakibat bahwa

$$Re(\lambda_1) < 0 \quad (31)$$

atau diperoleh

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (32)$$

dengan

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = -\frac{\pi\beta}{\mu\mathcal{R}_0N} + (\alpha + \mu + \sigma) +$$

$$(\mu + \rho) + \mathcal{R}_0 > 0,$$

$$a_2 = \frac{\mathcal{R}_0(\mu+\rho)\beta(\mu+\rho)+2\gamma\rho}{\beta(\mu+\rho)+\gamma\rho} +$$

$$\left(\frac{\pi\beta(\mathcal{R}_0-1)}{N\mathcal{R}_0}\right) > 0,$$

$$a_3 = \mu(\alpha + \mu + \sigma)(\mu + \rho)(\mathcal{R}_0 - 1) > 0.$$

Dari Persamaan (32) dibentuk Matriks Hurwitz sebagai berikut

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Melalui Matrik (33) diperoleh:

$$(i) H_1 = |a_1| = \frac{\gamma\rho}{\beta(\mu+\rho)+\gamma\rho} + (\mathcal{R}_0 + (\mu + \rho)) > 0. \quad (34)$$

$$(ii) H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 > 0, \quad (35)$$

dengan syarat $\mathcal{R}_0 > 1$

$$(iii) H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 H_2 > 0, \quad (36)$$

dengan syarat $\mathcal{R}_0 > 1$

Berdasarkan Persamaan (34), (35), dan (36), dapat diketahui bahwa bagian riil dari nilai eigen pada Persamaan (32) bernilai negatif. Jadi, dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium endemik ϵ_1 adalah stabil asimtotik syarat

$$\mathcal{R}_0 > 1.$$

Analisa sensitivitas

Pada bagian ini, diberikan analisis sensitivitas untuk mengetahui parameter-parameter yang berpengaruh terhadap *Basic Reproduction Number*. Analisis dilakukan pada kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$, yaitu kondisi terjadi penyebaran Covid-19, untuk mengidentifikasi parameter-parameter yang dominan di dalam model. Analisis sensitivitas dilakukan dengan menentukan indeks sensitivitas dari parameter-parameter yang terlibat. Menurut Chitnis dkk. [7] serta Edward dan Nyerere [8], indeks sensitivitas normalisasi dari *Basic Reproduction Number* didefinisikan sebagai berikut:

$$C_l^{\mathcal{R}_0} = \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial l} \times \frac{l}{\mathcal{R}_0} \quad (37)$$

dengan l adalah parameter-parameter yang terdapat pada Bilangan Reproduksi Dasar (18), yaitu $\pi, \alpha, \beta, \rho, \gamma, \sigma$, dan μ .

Berdasarkan Persamaan (18) dan (37), maka diperoleh rumus indeks sensitivitas normalisasi dari *Basic Reproduction Number* terhadap parameter-parameter pada Model SEIRD diberikan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} C_{\beta}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\beta(\rho+\mu)}{\beta(\rho+\mu)+\rho\gamma}, \\ C_{\gamma}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\rho\gamma}{\beta(\rho+\mu)+\rho\gamma}, \\ C_{\rho}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{(\beta+\gamma)\rho}{(\beta+\gamma)\rho+\beta\mu} - \frac{\rho}{(\rho+\mu)}, \\ C_{\mu}^{\mathcal{R}_0} &= \mu \left(\frac{\beta(\alpha+\sigma+\mu)(\rho+\mu)}{(\alpha+\sigma+\mu)(\rho+\mu)(\beta(\rho+\mu)+\rho\gamma)} - \frac{2(\alpha+\sigma+\rho)+(\alpha+\sigma)\rho-3\mu}{(\alpha+\sigma+\mu)(\rho+\mu)(\beta(\rho+\mu)+\rho\gamma)} \right), \\ C_{\alpha}^{\mathcal{R}_0} &= \left(\frac{-\alpha}{(\alpha+\sigma+\mu)} \right), \\ C_{\sigma}^{\mathcal{R}_0} &= \left(\frac{-\sigma}{(\alpha+\sigma+\mu)} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Nilai parameter pada Model SEIRD ditentukan melalui estimasi parameter dengan menggunakan metode *LSQ Nonlinear* (metode ini dapat dilihat pada tulisan Karim and Gunawan [9]) dan data penyebaran Covid-19 di Kalsel, yaitu periode 1 Sept - 30 Nov 2021, dengan $\mathcal{R}_0 = 2.2837$. Parameter-parameter hasil estimasi tersebut diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Parameter-parameter hasil estimasi.

Parameter	Nilai
-----------	-------



π	0.9999996
α	0.1293629
β	0.0000396
γ	0.4497533
ρ	0.5146312
σ	0.0031796
μ	0.0000003

Hasil perhitungan indeks sensitivitas berdasarkan Persamaan (38) dan Tabel 1 diberikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Indeks sensitivitas parameter.

Parameter	Indeks sensitivitas
α	0,0000880
β	0,9999120
γ	0,0000006
ρ	-0,0000259
σ	-0,9760085
μ	-0,0239892

Berdasarkan, Indeks Sensitivitas dalam Tabel 2, diperoleh bahwa setiap parameter memberikan pengaruh yang bervariasi terhadap \mathcal{R}_0 . Indeks sensitivitas yang bernilai positif menunjukkan adanya pengaruh perubahan nilai parameter yang berbanding lurus dengan perubahan nilai *Basic Reproduction Number*. Sedangkan indeks sensitivitas yang bernilai negatif menunjukkan adanya pengaruh perubahan nilai parameter yang berbanding terbalik dengan perubahan nilai *Basic Reproduction Number*.

Nilai indeks sensitivitas pada Tabel 2 menunjukkan bahwa parameter tingkat infeksi Covid-19 (β) dan tingkat kematian karena covid-19 (σ) adalah parameter yang paling sensitif terhadap perubahan nilai \mathcal{R}_0 . Jika nilai parameter tingkat infeksi Covid-19 meningkat maka akan berkontribusi pada peningkatan nilai \mathcal{R}_0 (atau sebaliknya). Sedangkan, jika nilai parameter tingkat kematian karena covid-19 meningkat maka akan berkontribusi pada penurunan nilai \mathcal{R}_0 (atau sebaliknya).

PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan di atas, maka dari Model SEIRD yang didasarkan pada kasus Penyebaran Covid-19 di Kalsel diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Titik ekuilibrium bebas penyakit dari model adalah

$$\epsilon_0 = (S, E, I, R) = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0\right),$$

dimana ϵ_0 stabil asimtotik dengan syarat $\mathcal{R}_0 < 1$.

2. Bilangan Reproduksi Dasar dari model adalah

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\pi}{\mu} \left(\frac{\beta(\rho+\mu)+\rho\gamma}{(\alpha+\sigma+\mu)(\rho+\mu)N} \right).$$

3. Titik ekuilibrium endemik dari model adalah

$$\epsilon_1 = (S, E, I, R) = \left(\frac{\pi}{\mu\mathcal{R}_0}, \frac{\gamma\pi(\mathcal{R}_0-1)}{(\rho+\mu)(\beta+\gamma)\mathcal{R}_0}, \frac{(\mathcal{R}_0-1)\mu N}{(\beta+\gamma)}, \frac{\alpha(\mathcal{R}_0-1)}{\beta+\gamma} N \right),$$

dimana ϵ_1 stabil asimtotik dengan syarat $\mathcal{R}_0 > 1$.

4. Nilai indeks sensitivitas parameter model menunjukkan bahwa, jika nilai parameter tingkat infeksi Covid-19 (β) di Kalsel meningkat maka akan berkontribusi pada peningkatan nilai \mathcal{R}_0 (demikian juga sebaliknya), dan jika nilai parameter tingkat kematian karena Covid-19 (σ) di Kalsel meningkat maka akan berkontribusi pada penurunan nilai \mathcal{R}_0 (dan demikian juga sebaliknya).

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Yulida Y and Karim M A 2020 Pemodelan Matematika Penyebaran Covid-19 di Provinsi Kalimantan Selatan *Media Bina Ilm.* **Vol.14** 3257–64
- [2] Karim M A and Yulida Y 2020 Analisa Pelaksanaan New Normal di Kalimantan Selatan melalui Model Matematika SIRD *Media Bina Ilm.* **Vol.14** 3681–8
- [3] Aldila D, Khoshnaw S H A, Safitri E, Anwar Y R, Bakry A R Q, Samiadji B M, Anugerah D A, GH M F A, Ayulani I D and Salim S N 2020 A mathematical study on the spread of COVID-19



-
- considering social distancing and rapid assessment: The case of Jakarta, Indonesia *Chaos, Solitons and Fractals* **139**
- [4] Abbasi Z, Zamani I, Mehra A H A, Shafieirad M and Ibeas A 2020 Optimal Control Design of Impulsive SQEIR Epidemic Models with Application to COVID-19 *Chaos, Solitons and Fractals* **139**
- [5] Abdy M, Side S, Annas S, Nur W and Sanusi W 2021 An SIR epidemic model for COVID-19 spread with fuzzy parameter: the case of Indonesia *Adv. Differ. Equations* **2021**
- [6] Driessche P and Watmough J 2002 Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission *Math. Biosci.* **180** 29–48
- [7] Chitnis N, Hyman J M and Cushing J M 2008 Determining important parameters in the spread of malaria through the sensitivity analysis of a mathematical model *Bull. Math. Biol.* **70** 1272–96
- [8] Edward S 2015 A Mathematical Model for the Dynamics of Cholera with Control Measures *Appl. Comput. Math.* **4** 53
- [9] Karim M A and Gunawan A Y 2020 Parameter Estimations of Fuzzy Forced Duffing Equation: Numerical Performances by the Extended Runge-Kutta Method *Abstr. Appl. Anal.* **2020**



HALAMAN INI SENGAJA DIKOSONGKAN